

# 四分木格子を適用した有限体積法に基づく遡上津波の数値解析法に関する基礎的研究

金沢大学大学院 学生会員 ○上野卓也  
金沢大学理工研究域 正会員 由比政年  
八千代エンジニアリング株式会社 正会員 天方匡純

## 1. はじめに

津波数値解析では、遡上域におけるモデル化に課題が多く残されている。その要因として、遡上波先端の Wet-Dry (水域-陸域) 境界部や常流・射流混在域において不連続波面の形成を含む複雑な非定常流場が形成され、数値的な不安定性が誘起されやすいことが挙げられる。こうした不連続波面を含む遡上波解析の安定性・解析精度向上には、航空宇宙工学分野で発展した高解像度スキームの適用が有効である。また、小スケールの構造物や水路等の影響を的確に考慮するためには、洋上伝播と比較して格段に細かな格子解像度を必要とする。そこで、必要な解像度に応じて空間格子を分割する四分木格子の活用が効果的と考えられる。以上の背景を考慮し、本研究では、有限体積法に基づく高解像度スキームをベースとして、四分木格子を活用した津波・洪水の氾濫解析数値モデルの構築を試みる。

## 2. 数値計算モデル

### (1) 長波方程式

数値モデルの基礎方程式として、非線形長波方程式を用いる。水面変位を用いた表記法を採用する。

$$\frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} = \mathbf{s} \quad (1.1)$$

ここで、 $\mathbf{q}$  は保存量、 $\mathbf{f}$ 、 $\mathbf{g}$  は  $x$ 、 $y$  方向の流束、 $\mathbf{s}$  はソース項であり、ベクトル量は以下のように表される。

$$\mathbf{q} = [\eta \quad q_x \quad q_y]^T \quad (1.2)$$

$$\mathbf{f} = \left[ q_x \quad uq_x + \frac{1}{2}g(\eta^2 - 2\eta z_b) \quad uq_y \right]^T \quad (1.3)$$

$$\mathbf{g} = \left[ q_y \quad vq_x + \frac{1}{2}g(\eta^2 - 2\eta z_b) \right]^T \quad (1.4)$$

$$\mathbf{s} = \left[ 0 \quad -\frac{\tau_{bx}}{\rho} - g\eta \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad -\frac{\tau_{by}}{\rho} - g\eta \frac{\partial z_b}{\partial y} \right]^T \quad (1.5)$$

ここで、 $\eta$  は水位、 $q_x (=uh)$ 、 $q_y (=vh)$  は  $x$  および  $y$  方向の線流量、 $u$ 、 $v$  は  $x$  および  $y$  方向の水深平均流速、 $h (= \eta - z_b)$  は水深、 $z_b$  は底面地盤高である。

### (2) ゴドゥノフ型有限体積法

衝撃波による影響を考慮するため、ゴドゥノフ型有限体積法を MUSCL 法で解き、2 次の子測子・修正子法 (ルンゲ・クッタ法) により時間発展させる。

ゴドゥノフ型有限体積法では、セル境界での値は、セル中心の値から再構成される。例えば、境界面の左側では、水位  $\bar{\eta}_{i+1/2,j}^L$  は次式で計算される。

$$\bar{\eta}_{i+1/2,j}^L = \eta_{i,j} + \frac{\psi}{2} (\eta_{i,j} - \eta_{i-1,j}) \quad (1.6)$$

ここで、 $\psi$  は勾配制限関数であり、本モデルでは安定性に優れる  $\text{minmod}$  関数を制限関数として用いた。また、数値流束を計算するための近似リーマン解法として、HLLC (Harten-Lax-van Leer-Contact) 法を用いた。

### (3) 四分木格子

四分木格子とは、空間格子を 4 分割した規則的な格子構造であり、局所的な解像度の増減が可能である。また、隣接する格子サイズが異なる場合においても、補間式 (Liang, 2011) を導入することで、格子サイズが等しい場合と同様のモデルを用いることができる。図 1 は隣接する格子解像度が異なる場合のデータ配置を示す。P は解が求められているデータ点、in は補間が必要な点であり、1, 2, 3, 4 は隣接するデータ点である。まず、図 1(a) では、単純に次のように補間される。

$$q_{in} = (q_1 + q_2 + q_3 + q_4)/4 \quad (1.7a)$$

ここで、 $q$  は流れ変数を表す。続いて、図 1(b) の場合では、

$$q_{in} = (q_P/4) + (q_1/2) + (q_2/4) \quad (1.7b)$$

図 1(c) の場合では、

$$q_{in} = (q_P/3) + (q_1/2) + (q_2/6) \quad (1.7c)$$

と表示される。2 つ先の格子を補間する場合には、上記の (a)、(b)、(c) に加え、(d) のケースが存在し、補間式は次のように表される。

$$q_{in} = (2q_1/3) + (q_2/6) + (q_3/6) \quad (1.7d)$$

その他の方向についての補間式は、格子位置を回転することで表現できる。

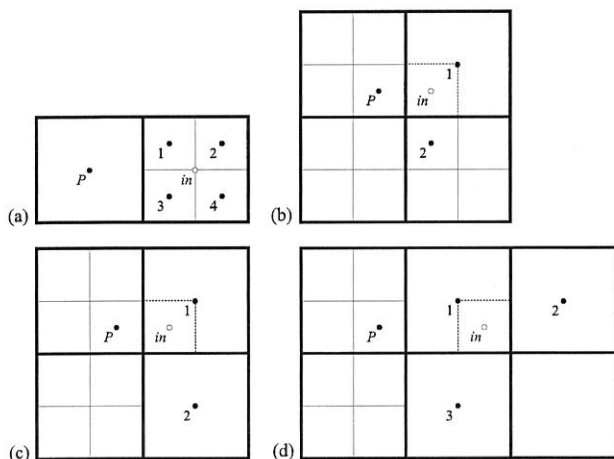


図1 隣接する格子のサイズが異なる場合の補間

### 3. 計算結果

四分木格子の導入による計算モデルを評価するための基礎検討として、断面2次元モデル(二分木格子)での計算を行った。まず、テストケースとして、直角堰を設置した水路を想定した場合の計算を行った。計算条件は、水路長10.0m、直角堰高さ0.05m、初期水位0.20m(図-2)であり、 $\Delta t$ はCFL条件に基づいて算出した。格子サイズは、case1では全域で $\Delta x = 0.04(m)$ 、case2では $\Delta x = 0.04(m)$ をベースとし、堰近傍で $\Delta x = 0.02(m)$ 、 $\Delta x = 0.01(m)$ と細分化した。case3では全域で $\Delta x = 0.01(m)$ とした。水面変化の空間変化について、計算結果を比較したものを図3に示す。case1では解像度が低いため直角堰形状は正確に表現されておらず、波の前面と背面の勾配変化点において、case2,3を平滑化した結果となっている。一方、case2,3は直角堰を正確に表現しており、両者の水位は一致している。計算格子数を比較すると、case1は252、case2は269、case3は1002であり、四分木格子を導入したcase2では、格子数を大幅に減らしながらも、case3と同様の結果が得られた。

次に、Soares(2007)によって行われた、三角堰を越流するダム崩壊流れの水理実験と数値解析との比較を行った。実験条件を図-4に示す。 $\Delta t$ はCFL条件に基づいて算出した。格子サイズは、case1では全域で $\Delta x = 0.04(m)$ 、case2では堰付近を細分化し、 $3.8m < x < 5.1m$ は $\Delta x = 0.02(m)$ 、 $4.0m < x < 4.9m$ は $\Delta x = 0.01(m)$ 、その他の範囲は $\Delta x = 0.04(m)$ とした。水面変位の空間変化について、実験結果と計算結果を比較したものを図-5に示す。実験結果と計算結果を比較

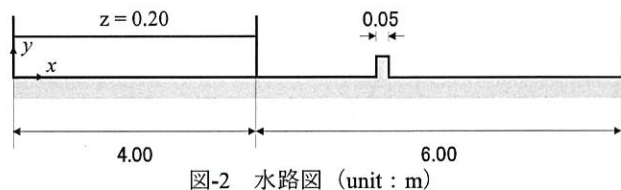


図-2 水路図 (unit : m)

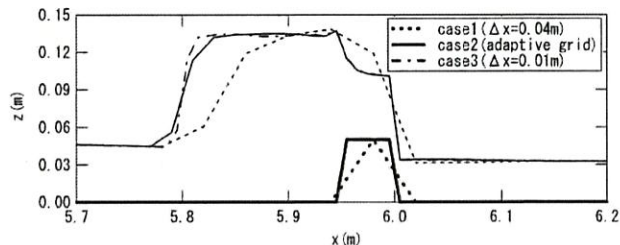


図-3 計算結果の比較 ( $t = 0.2s$ )

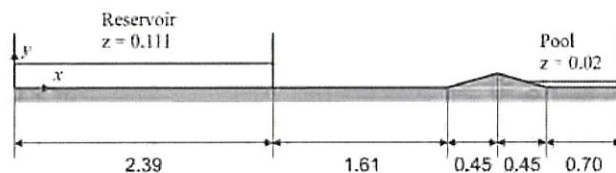


図-4 実験水路図 (Soares, 2007) (unit : m)

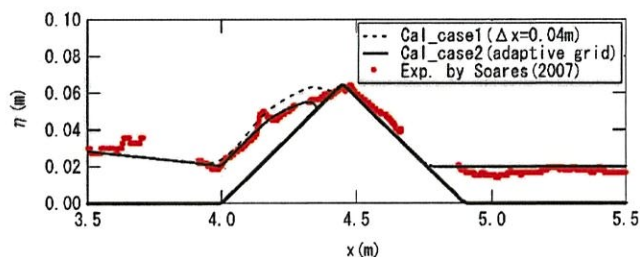


図-5 実験結果と計算結果の比較 ( $t = 1.8s$ )

すると、三角堰を遡上する範囲において、case1は実験結果よりも水位が大きく、実験結果を表現するためには解像度が不足しているが、case2は定性的・定量的に良好に一致している。

### 4. 終わりに

四分木格子の適用により、計算格子数を大幅に減らし、精度良く計算を行うことができることを確認した。現在、平面2次元計算への拡張を進めており、その結果を講演時に紹介する予定である。

### 参考文献

Liang, Q. (2011): A structured but non-uniform Cartesian grid-based model, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 66, pp.537-554.

Soares, S. (2007): Experiments of dam-break wave over a triangular bottom sill, *Journal of Hydraulic Research*, 45 Extra Issue, pp.19-26.